ユークリッド平面上の積空比定数のエネルギー最小化車両経路問題の近似アルゴリズムについて (アルゴリズムと計算機科学の数理的基盤とその応用)

長崎, 大生; 武井, 由智

数理解析研究所講究録
第1691巻 2010年 65-71

ユークリッド平面上の積空比定数のエネルギー最小化車両経路問題の近似アルゴリズムについて

長崎 大生 Hiroki NAGASAKI　　武井 由智 Yoshinori TAKEI
長岡技術科学大学 電気系
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology

1 はじめに

荷物をトラックで配達するとき, 荷物が重ければ重いほど, 移動距離が長ければ長いほど消費するエネルギー (コスト) が大きくなる. 複数台の車両で複数の荷物を複数の配達先に届けるとき, コストが最小となる配達順路 (ツアー) を求める問題をエネルギー最小化車両経路問題 (Energy Minimizing Vehicle Routing Problem: EMVRP) として Imdat Kara, Bahar Y. Kara, M. Kadri Yetis が定式化している [3]. しかし同論文では最適ツアーを計算する効率的なアルゴリズムは提案されていない.

また, EMVRP において車両台数を 1, 車両重量を零とすると重みつき最小待ち時間問題 (Weighted Minimum Latency Problem: WMLP) [2] となる. WMLP は n 都市を全て訪問し, 各都市の重みつき待ち時間の総和が最小となるようなツアーを探す問題である. 最短距離のツアーを求める問題は巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem: TSP) として知られているが, 最短ツアーは必ずしも WMLP の最適ツアーとはならない. WMLP は NP 困難であるが, 都市間の距離がユークリッド距離で定義される WMLP には Arora, Karakostas [2] の近似アルゴリズムが存在する. なお, このアルゴリズムは Arora [1] のユークリッド TSP に対する近似アルゴリズムに修正を行ったものである.

本稿では, WMLP に車両重量のコストが加わると車両台数 1 で都市間の距離がユークリッド距離で定義される特別な EMVRP になることに着目する (以下, 断りがない限り, この特別な場合の EMVRP を単に "EMVRP" と表記する). そして, Arora, Karakostas の WMLP に対する近似アルゴリズムに車両重量対応の修正を加えることを考える.

EMVRP の例を下に示す. 図 1 のように Start, A, B, C の 4 都市があり, A, B, C は需要量 1, 20, 1 をそれぞれもっているとする. さらに車両重量を 1 とする. Start からトラックを出発させ全都市の需要を満たすように荷物を配達した後, 再び Start に戻ってくるツアーの中でコストが最小のものを求める. EMVRP でのコストは瞬間重量と瞬間進行距離の積の経路に沿った積分値で, これが実際の消費エネルギーとほぼ比例することを I. Kara らが指摘している [3]. 次のような 2 つの配達ツアーでコストを計算してみる.

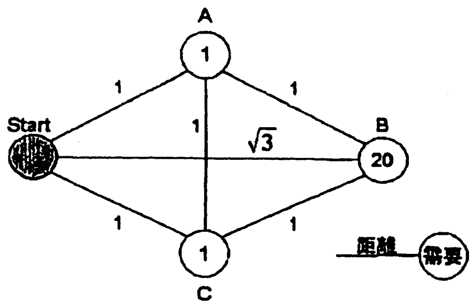

図 1: EMVRP のインスタンスの例

$$\text{ツアー}1 = (\mathrm{Start}, A, B, C, \mathrm{Start}),$$
$$\text{ツアー}2 = (\mathrm{Start}, B, A, C, \mathrm{Start}).$$

ツアー 1 のコストを $cost1$, ツアー 2 のコストを $cost2$ とすると

$$cost1 = 1 \times 23 + 1 \times 22 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 48$$
$$cost2 = \sqrt{3} \times 23 + 1 \times 3 + 1 \times 2 + 1 \times 1 \fallingdotseq 45.1$$

と求まる. それぞれのコストは図 2, 図 3 のような横軸をツアーに沿った進行距離, 縦軸をその時点での総重量としたグラフの面積になる. ツアー 1 は最短距離のツアーであるがコストは最小ではない.

上の例から分かるように最短距離で荷物を配るとコストが余計に掛かる場合がある. そのため EMVRP は TSP とは異なる問題として考える必要がある.

2 技術的背景

2.1 巡回セールスマン問題

n 都市をそれぞれ 1 回だけ訪れる最短距離の訪問順路 (ツアー) を求める問題を巡回セールスマン問題

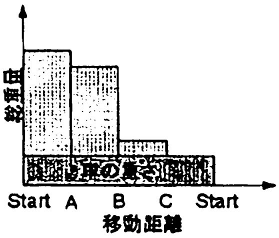

図 2: cost1

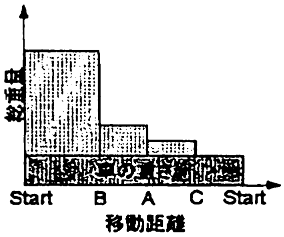

図 3: cost2

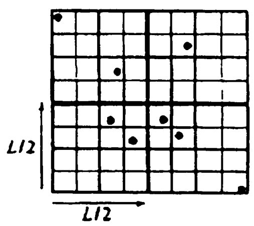

図 4: 完全 4 分木

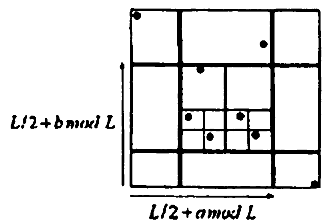

図 5: ランダムシフト 4 分木

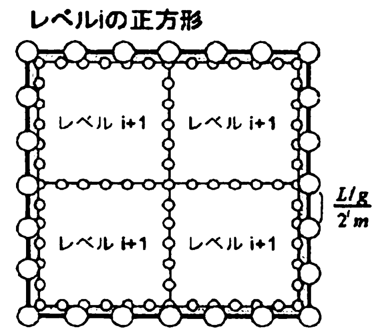

図 6: ポータルの配置

(TSP) という．この問題の入力インスタンスはグラフ $G=(V,E)$ と距離関数 $d:E\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で与えられる．グラフの頂点 $v_i\in V$ $(i=0,1,2,\ldots,n-1)$ は都市 i を表し，辺 $e_{i,j}=(v_i,v_j)\in E$ には距離 $d(v_i,v_j)>0$ が定義されている．ツアーにおいて j 番目に訪れる都市 i を i_j と書くと，TSP のコストは次のように定義される．

$$Cost_{\mathrm{TSP}}=\sum_{j=0}^{n-1} d(v_{i_j},v_{i_{(j+1)}}) \qquad (v_{i_n}=v_{i_0}). \quad (1)$$

式 (1) を最小化するツアー $(i_0,i_1,\ldots,i_{n-1})$ がこの問題の厳密最適解である．

TSP の厳密最適解を求めることは NP 困難であることが知られている [4]．しかし，都市が $v_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2$ で与えられ，l_2 ノルム，すなわち $d(v_1,v_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ で距離が定義される特別な場合，ユークリッド TSP に対しては，n に関して多項式時間で走行する近似アルゴリズムが Arora [1] によって提案されている．

2.1.1 ユークリッド TSP に対する Arora の近似アルゴリズムの概要

Arora の TSP に対するランダム化された近似アルゴリズムは，任意定数 $\forall c>1$ に対して最適ツアーの $(1+1/c)$ 倍以下の長さとなるツアーを実行時間 $O(n(\log n)^{O(c)})$ で計算することができる [1]．

Arora の近似アルゴリズムの主となるアイディアは “ランダムシフト 4 分木” を作り，“(m,r)-light ツアー” を探索することである．以下にその言葉の意味を説明する．

与えられたインスタンスに対して全ての都市を覆うことのできる正方形をバウンディングボックスという．バウンディングボックスを配置した後，それを 4 分割し，その結果生じた 4 つの正方形を更に 4 分割するということを繰り返す．同じ深さにある全ての正方形に着目し，含まれる都市の数がそれぞれ 1 以下となったら分割をやめる．その結果生じた正方形を完全 4 分木という (図 4)．4 分木においてノードは正方形であり，正方形を 4 分割して新たに出来た小さな等しいサイズの正方形をその子ノードとする．

次に，4 分木の正方形の各辺にポータルという穴を等間隔に m 個配置する (図 6)．ツアーはこのポータルでのみ正方形の辺を通過できるとする．正方形の 1 辺を高々 r 回通過するツアーのことを “(m,r)-light ツアー” という．さらに，整数 a,b を $[0,L)$ の範囲でランダムに選び，4 分木の分割線を x 軸方向に a シフト (x 座標の X を $X+a \mod L$ に移動) する．同様に y 軸方向に b シフト (y 座標の Y を $Y+b \mod L$ に移動) する．各深さの正方形に着目し，都市が高々 1 つ含まれるように分割線を消去する．そのようにして得られた 4 分木を “ランダムシフト 4 分木” という (図 5)．

Arora はランダムシフト 4 分木に関して (m,r)-light となるツアーが TSP に対する近似ツアーとなることを示している (TSP に対する構造定理 [1])．このようなツアーを動的計画法で探索する．

2.2 重みつき最小待ち時間問題

n 都市をそれぞれ 1 回だけ訪れるとき，各都市の重みつき待ち時間の総和が最小になるツアーを求める問題を重みつき最小待ち時間問題 (WMLP) という．WMLP の入力は 2.1 節の TSP の入力に加え，都市 i

の待ち時間の重み $w_i > 0$ が与えられる．また，v_{p_0} を出発点とする．WMLP のコストは以下のように定義される．

$$Cost_{\mathrm{WMLP}} = \sum_{i=1}^{n-1} \left[w_{p_i} \sum_{j=0}^{i-1} d(v_{p_j}, v_{p_{j+1}}) \right]. \quad (2)$$

式 (2) は次のように書くこともできる．

$$Cost_{\mathrm{WMLP}} = \sum_{i=0}^{n-2} \left[\sum_{j=i+1}^{n-1} w_{p_i} \right] d(v_{p_i}, v_{p_{i+1}}). \quad (3)$$

この問題は NP 困難であるが，ユークリッド平面の WMLP に対して Arora, Karakostas は次の定理を得ている．

定理 2.1 (Arora, Karakostas [2]). ユークリッド平面の *WMLP* に対して，コストが最適解の高々 $(1+\epsilon)$ 倍となるツアーを，実行時間 $(nW)^{O(\frac{\log W}{\epsilon})}$ で計算するアルゴリズムが存在する．ここで $\epsilon > 0$ は任意定数，$W = \sum_{i=1}^{n-1} w_i$ である．

このアルゴリズムの実行時間は W に関して超多項式時間であることに注意する．

2.3 エネルギー最小化車両経路問題

エネルギー最小化車両経路問題 (EMVRP) は異なる需要を持ったすべての n 都市にトラックで荷物を届けるツアーの中で，消費エネルギー (コスト) が最小であるツアーを求める問題である．EMVRP の入力インスタンスは，都市の集合 $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ $(v_i = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2)$，都市の需要 $(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) \in \mathbb{Z}_{>0}$，車両重量 $w_\infty > 0$ である．また，都市の総需要を $W = \sum_{i=0}^{n-1} w_i$ と表すこととする．また積空比

$$\frac{W + w_\infty}{w_\infty} = \frac{W}{w_\infty} + 1 \quad (4)$$

が定義される．

j 番目に訪れる都市を v_{p_j} と表し，$d(u,v)$ を都市 u, v 間のユークリッド距離，車両の発着所を $v_{p_0} = v_{p_n} = v_0$ とし $w_0 = 0$ とすると，EMVRP のコストは以下の式で定義される．

$$Cost = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sum_{j=i+1}^{n} w_{p_j} + w_\infty \right] d(v_{p_i}, v_{p_{i+1}}). \quad (5)$$

この問題の解は式 (5) を最小とするツアー $(v_{p_0}, v_{p_1}, \dots, v_{p_n})$ である．

3 問題の解析

ここでは，Arora, Karakostas [2] の WMLP に対する解析に車両重量対応の修正を加えた議論を行う．なお，以降で使われる対数の底は断りがない限り e とする．

3.1 EMVRP の近似ツアーの解析

本節では，EMVRP の最適ツアーを近似するような複数本の最短ツアーの接合の存在を検討する．$\mathcal{T} = p_0 \to p_1 \to p_2 \to \dots \to p_{n-1} \to p_n (= p_0)$ を EMVRP の最適ツアー，$\mathcal{T}$ の $Cost$ を OPT とする．$0 < \epsilon < 1$ を任意に与えられる近似精度とし $\mathcal{T}$ を以下のような k 本のセグメントに分割するものとする．セグメント $i (= 1, 2, \dots, k)$ には n_i 個の都市が含まれ，その総需要は次の W_i とする:

$$W_1 = \frac{\epsilon W}{1+\epsilon} \quad (6)$$

$$W_i = \frac{W_{i-1}}{1+\epsilon} = \frac{\epsilon W}{(1+\epsilon)^i} \quad (i = 2, 3, \dots, k-1) \quad (7)$$

$$W_k = W - \sum_{i=1}^{k-1} W_i = \frac{W_{k-1}}{\epsilon} \quad (8)$$

とする．さらに

$$W_{>i} = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^{k} W_j & (i = 1, 2, \dots, k-1) \\ 0 & (i \geq k) \end{cases} \quad (9)$$

とおくと

$$W_{>i} = \frac{W_i}{\epsilon} \quad (i = 1, 2, \dots, k-1), \quad (10)$$

である．

$\mathcal{T}$ のセグメント分割数 k が後に第 4 章で記述するアルゴリズムの計算量に影響するため，$\mathcal{T}$ の分割を

$$W - (W_1 + \dots + W_{k-2}) \leq \epsilon w_\infty \quad (11)$$

すなわち

$$W_{k-1} + W_k \leq \epsilon w_\infty \quad (12)$$

となるまで行うとしたときの分割数 k の十分条件を考える．式 (7), (8) より

$$\frac{\epsilon W}{(1+\epsilon)^{k-1}} + \frac{W}{(1+\epsilon)^{k-1}} \leq \epsilon w_\infty$$

すなわち

$$\frac{W}{(1+\epsilon)^{k-2}} \leq \epsilon w_\infty.$$

これを変形して

$$k \geq \frac{\log \frac{W}{w_\infty} + \log \frac{1}{\epsilon}}{\log(1+\epsilon)} + 2 \tag{13}$$

となるようにすれば十分であるが

$$\log(1+\epsilon) \geq \frac{\epsilon}{2} \qquad (0 \leq \epsilon \leq 1) \tag{14}$$

より

$$k \geq \frac{2\left(\log \frac{W}{w_\infty} + \log \frac{1}{\epsilon}\right)}{\epsilon} + 2 \tag{15}$$

となるように k を決めればよい.

Arora, Karakostas [2] の WMLP では車重 w_∞ の概念がなかった. k の選択は式 (15) で $w_\infty = 1$ としたものに相当し, その結果 $k = O(\frac{\log W}{\epsilon})$ となり, これが実行時間が W に関して超多項式となる原因だった.

ここで, $w_\infty \geq \epsilon W$ となる条件を考えてみる. この条件は実際の運送で十分考えられる自然な条件である. つまり, 車重に比べて極端に重い荷物を載せないということは十分ありうるということである. このとき, $\log \frac{W}{w_\infty} \leq \log \frac{1}{\epsilon}$ より, $k = O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon}\right)$ である.

このように k を定めると次の定理が成り立つ.

定理 3.1. $w_\infty \geq \epsilon W$ なら, EMVRP には最短パスを $k = O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon}\right)$ 本接合した, 最適ツアーの高々$(1+\epsilon)$倍のコストとなるツアーが存在する.

証明. 最適ツアーのコストを OPT とし, まずその OPT の下界を与える. T_i を $\mathcal{T}$ の i 番目セグメントの長さとすると OPT の下界は

$$\begin{aligned} OPT &\geq \sum_{j=1}^{k-1}(W_{>j} + w_\infty)T_j + w_\infty T_k & (16)\\ &= \sum_{j=1}^{k-2} W_{>j}T_j + W_k T_{k-1} + \sum_{i=1}^{k} w_\infty T_i & (17)\end{aligned}$$

でおさえられる.

次に, $\mathcal{T}$ を近似する最短パス k 本の接合のコストを上から評価する. i 番目セグメントを, このセグメント上の都市をカバーする最短パスに置き換え, その長さを T'_i とすると

$$T'_i \leq T_i \tag{18}$$

である. k 本すべてのセグメントを最短パスに置き換え, 結果として新たに生じたツアーを $\mathcal{T}'$ とすると

$$\begin{aligned} &Cost(\mathcal{T}' \text{の } i \text{ 番目セグメント})\\ &\leq (W_i + W_{>i} + w_\infty)T'_i \quad (i = 1, \ldots, k) \qquad (19)\end{aligned}$$

とおさえられるため $\mathcal{T}'$ のコストの上界は

$$Cost(\mathcal{T}') \leq \sum_{i=1}^{k} W_i T'_i + \sum_{i=1}^{k} W_{>i} T'_i + \sum_{i=1}^{k} w_\infty T'_i \tag{20}$$

式 (10), (12), (17), (18) より

$$\leq (1+\epsilon)OPT \tag{21}$$

が得られる. □

定理 3.1 では複数の最短パスを接合してコストが高々$(1+\epsilon)OPT$ のツアーを構成できることを示した. しかし, EMVRP には 1 本の最短ツアーで配達しても, コストが高々$(1+\epsilon)OPT$ で抑えられる場合がある.

定理 3.2. EMVRP において, $w_\infty \geq W/\epsilon$ なら, 最短ツアーのコストは高々$(1+\epsilon)OPT$ である.

証明. EMVRP の同じインスタンスに対する最適ツアーを $\mathcal{T}$, 最短ツアーを $\mathcal{T}'$ とし, それぞれの長さを T, T' $(T \geq T')$ とする. $\mathcal{T}$ のコストを OPT とすると $w_\infty T \leq OPT$ である. 最短ツアーのコストを $Cost(\mathcal{T}')$ とすると

$$\begin{aligned} Cost(\mathcal{T}') &\leq (W + w_\infty)T'\\ &\leq (W + w_\infty)T \end{aligned}$$

ここで, $w_\infty \geq W/\epsilon$ なら

$$\leq (\epsilon w_\infty + w_\infty)T$$

$w_\infty T \leq OPT$ より

$$\leq (1+\epsilon)OPT \tag{22}$$

□

定理 3.2 は, 荷物の総重量が車両重量より十分小さいと荷物によるコストへ影響が小さくなり, コストが車両重量と総移動距離の積で近似できるため, 最短ツアーで配達してもコストを抑えられるということを意味している.

3.2 インスタンスのよい丸め性質

EMVRP のインスタンスが以下の条件を満たしているとき, そのインスタンスは “よい丸め性質を持つ” という.

(i) すべての都市は整数座標

(ii) すべての都市間の距離は $1\sim O\left(\frac{n}{\epsilon}\frac{W+w_\infty}{w_\infty}\right)$

ここで $\epsilon>0$ は任意定数である．任意のインスタンスに次の "丸め操作" を行うことでよい丸め性質を持つインスタンスを作ることが出来る．これは文献 [2] のアルゴリズムとほぼ同じであるが，下記の STEP2 でのパラメータ設定で車重 w_∞ を考慮する点が修正されている．

ALGORITHM 1 (丸め操作).

1. 一辺の長さが L のバウンディングボックス (インスタンスを含む最小の正方形) を置く．
2. 粒度 $g=\frac{\epsilon L}{n}\frac{w_\infty}{W+w_\infty}$ の格子を置く．
3. 各ノードを最も近い格子点に動かす．
4. すべてのエッジの重みを g で割る．

定理 3.3. 全ての都市を訪れる任意のツアーに対して，与えられた元のインスタンスと上記の丸め操作で丸められたインスタンスの総コストの差は高々 $\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon OPT$ である．ここで，OPT は最適ツアーのコストである．

証明. ある 1 つの都市を格子点に動かしたときツアーの長さは高々 $\sqrt{2}g$ 増加し，コストは高々 $\sqrt{2}g\cdot(W+w_\infty)$ 増加する．そのため n 都市すべてを格子点に動かすとコストは高々 $n\cdot\sqrt{2}g\cdot(W+w_\infty)=\sqrt{2}\epsilon Lw_\infty$ 増加する．$OPT\geq 2Lw_\infty$ より，丸め操作によるコストの増加は高々 $\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon OPT$ になることがわかる． □

また，よい丸め性質を持つインスタンスはもう 1 つの性質を持っている．それは，現れ得る距離の種類が高々 $(L/g)^4$ であるということである．なぜなら，格子の x 座標，y 座標はそれぞれ L/g 通りあり，距離を求めるために 2 つの格子点を決定する方法が $(L/g)^2\cdot(L/g)^2$ 通りであるためである．さらに，$w_\infty\geq\epsilon W$ であれば

$$\left(\frac{L}{g}\right)^4=O\left(\frac{n}{\epsilon}\frac{W+w_\infty}{w_\infty}\right)^4\leq O\left(\frac{n}{\epsilon}\left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^4\leq O\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)^4 \tag{23}$$

である．

3.3 構造定理

$w_\infty\geq\epsilon W$ であるとき，よい丸め性質を持つインスタンスを EMVRP の入力インスタンスとすると次のような構造定理が成り立つ．

定理 3.4 (EMVRP の構造定理). $w_\infty\geq\epsilon W$ であるとき，よい丸め性質を持った n 都市のあらゆるインスタンスに対して，ランダムシフト 4 分木は確率が少なくとも 1/2 で次を満たす．ランダムシフト 4 分木は，(m,r)-light かつコストが高々 $(1+\epsilon)OPT$ のツアーを持つ．ここで，$m=O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{n}{\epsilon}), r=O(k/\epsilon)=O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\epsilon})$，$OPT$ は EMVRP の最適コストである．

証明. ここでの主となるアイディアは，ツアーを定理 3.1 で存在すると保証した $k=O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})$ 本のセグメントに分割した後，Arora [1] のユークリッド TSP の構造定理を利用することである．

定理 3.5 (ユークリッド TSP の構造定理 [1]). $c>1$ を任意の定数とする.TSP インスタンスにおいて都市間の距離の最小値を 8，L をバウンディングボックスのサイズとする．$0\leq a,b\leq L$ をランダムに選ぶと，確率が少なくとも 1/2 でランダムシフト 4 分木に関して (m,r')-light でコストが高々 $(1+1/c)TSP$ のツアーが存在する．ここで，$m=O(c\log L), r'=O(c)$，TSP は最短ツアーの長さである．

定理 3.5 を k 本のセグメント $T_1,T_2,\ldots,T_k$ に応用する．k 本のセグメントを接合した新しいツアーは 4 分木の正方形の辺を高々 $O(ck)$ 回交差する (なぜなら，1 本のセグメントは高々 $O(c)$ 回交差するため)．

定理 3.5 は最短ツアーを (m,r')-light に変形した後，ツアーの長さの増加の期待値が次のようにおさえられることを用いて証明されている [1].

$$E_{a,b}[\text{ツアーの長さの増加}]\leq\frac{f}{r'}TSP, \tag{24}$$

ここで f は定数である．

EMVRP におけるツアーの変更に対し，i 番目のセグメントに $W_i+W_{>i}+w_\infty$ の重みを割り当てる．パス T_i の長さ増加によるコスト増加の期待値は，式 (24) を用いて

$$E_{a,b}[\text{パス }T_i\text{による総コストの増加}]\leq\frac{f}{r'}(W_i+W_{>i}+w_\infty)TSP_i, \tag{25}$$

ここで TSP_i は T_i の最短の長さである．$T_1,\ldots,T_k$ を (m,r')-light に変更することによって増加するコストの期待値は，期待値の線形性によって

$$E_{a,b}[T_1,\ldots,T_k\text{による総コストの増加}]\leq\frac{f}{r'}\sum_{i=1}^{k}(W_i+W_{>i}+w_\infty)TSP_i$$

式 (20) から式 (21) の変形と同様にして

$$\leq\frac{f}{r'}(1+\epsilon)OPT \tag{26}$$

$c = 1/\epsilon, r' = 4f/\epsilon$ とすることで式 (26) は

$$\leq \frac{f}{4f/\epsilon}(1+\epsilon)OPT$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2}OPT \qquad (27)$$

となり, 総コストの増加の期待値は $\frac{\epsilon}{2}OPT$ 以下であるため, Markov の不等式から

$$Pr_{a,b}(T_1,\ldots,T_k\text{による総コストの増加} \geq \epsilon OPT) \leq \frac{1}{2} \qquad (28)$$

したがって, $k = O(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})$ 本のセグメントを接合したツアーの総コストの増加は, 1/2 以上の確率で ϵOPT 以下となる. このとき, $r' = O(ck) = O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\epsilon})$ であり, よい丸め性質 (ii) より

$$L \leq n \cdot O\left(\frac{n}{\epsilon}\frac{W+w_\infty}{w_\infty}\right) \leq O\left(\frac{n^2}{\epsilon^2}\right) \qquad (29)$$

より

$$m = O(c\log L) = O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$$
$$= O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\frac{n}{\epsilon}\right) \qquad (30)$$

である. □

4 アルゴリズムの提案と解析

ここでは Arora, Karakostas [2] の WMLP に対する近似アルゴリズムが車両重量に対応するように修正を加える.

4.1 EMVRP に対する近似アルゴリズム

以下に示すアルゴリズムは動的計画法で, 4 分木の細かい正方形中の部分解をより大きい正方形の部分解に統合していくものである. これは文献 [2] のアルゴリズムとほぼ同じであるが, STEP2 で与えるパラメータに車重対応の修正を加えている. また, 入力としては 3.2 節の丸め操作で丸めたインスタンスを与える.

ALGORITHM 2.

1. インスタンスに対してランダムシフト 4 分木を作る. 深さ i の 1 つの正方形を S_i とし, その 4 つの子を $S_{i,1}, S_{i,2}, S_{i,3}, S_{i,4}$ と表すこととする.
2. 近似精度 $\epsilon > 0$ を与え, k, m, r を決める. ここで $k \geq \frac{2(\log\frac{W}{w_\infty}+\log\frac{1}{\epsilon})}{\epsilon} + 2$, $m = O\left(\frac{1}{\epsilon}\log\left(\frac{n}{\epsilon}\frac{W+w_\infty}{w_\infty}\right)\right)$, $r = O(k/\epsilon)$ ととる. (構造定理 3.4 で保障したとおりにとる)

   深さ $i = \max(4$ 分木の深さ$)$ として以下の手順をボトムアップ式に繰り返す.
3. 深さ i にあるすべての S_i に注目する.
4. 各 S_i において以下のものを "推測" する. "推測" は可能な値の全列挙を行い, それを look-up 表に記録することをいう.
   (a) ツアーが S_i に入ってくる回数 (範囲 $[0, r]$).
   (b) 交差されるポータルの多重集合と使われる順番 ($(\binom{m+r}{r})^4 \cdot (4r)!$ 通り).
   (c) 交差した後のツアーの残り (以下, ツアーポーションと呼ぶ) の長さ ($(L/g)^4$ 通り).
   (d) ツアーポーションに含まれる都市の総需要 (範囲 $[w_\infty, w_\infty + W] \cap \mathbb{Z}$).

   $i = \max(4$ 分木の深さ$)$ なら STEP6 へ, それ以外は STEP5 へ進む.
5. "推測" と一致する $S_{i,1},\ldots,S_{i,4}$ 内のツアー (以下, サブツアーとよぶ) を look-up 表から探す. S_i の 1 つの推測に対して複数のサブツアーが存在する場合は, コストが最小のものを選ぶ.
   STEP6 へ進む.
6. 同じ S_{i-1} に含まれる 4 つの S_i 内のサブツアーのうち "つじつまが合うもの" を接合する. その結果生成された大きなサブツアーが S_{i-1} に関して $(m,r)-light$ なら S_{i-1} のサブツアーとする.

   $i \leftarrow i-1$ とし, $i = -1$ なら終了, そうでなければ STEP3 へ.

この列挙は 1 本以上の候補ツアーを作り, その中で最小のコストとなるツアーを選ぶ. これがアルゴリズムの出力となる. 交差されるポータルの順番は推測したツアーポーションの長さで決められる (最初に訪れられるポータルは推測されたツアーポーションの長さが最長のもの, 次に訪れられるポータルは 2 番目に長いもの, ...). STEP6 で接合の仕方が "つじつまが合うもの" となっていて曖昧である. これはある正方形 S' と S'' の推測されたサブツアーのツアーポーションに含まれる都市の総需要がそれぞれ W', W'' $(W' > W'')$ であるとき, 以下の条件を満たしていれば接合するという意味である.

(i) S'' において使われているポータルのペアの片方が S' のものと一致.

(ii) S'' のサブツアーに含まれる都市の総需要が $W' - W''$.

このアルゴリズムの実行時間は動的計画法の look-up 表のサイズに依存する. STEP4 の (a), (b) を合わせた選択肢は高々$(mr)^{O(r)}$ 通りであり, (c), (d) はアルゴリズムの STEP4 に記述したとおりである. 推測の総計は多めに数えて

♯ポータルの並び順

×(ツアーポーションの長さ×♯残りの総需要)$^{\sharp 交差}$

$$= (mr)^{O(r)} \times \left(\left(\frac{L}{g}\right)^4 \times W\right)^{O(r)}$$

$w_\infty \geq \epsilon W$ なら

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{\epsilon^3}\left(\log\frac{1}{\epsilon}\right)\left(\log\frac{n}{\epsilon^2}\right) \times \left(\frac{n}{\epsilon^2} \times W\right)\right)^{O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\epsilon})} \\
&= O\left(\frac{1}{\epsilon^6}n^2 W\right)^{O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\epsilon})} \\
&= (nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)} \qquad (31)
\end{aligned}$$

である. この解析は帰納的な STEP に対しても同様である. つまり, 任意の深さの正方形における look-up 表のサイズは $(nW)^{O(\frac{1}{\epsilon^2}\log\frac{1}{\epsilon})}$ である. 正方形の数は $O((L/g)^2 \log(L/g))$ であるため, このアルゴリズムの計算量は

$$O((L/g)^2 \log(L/g)) \cdot (nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)}$$

$w_\infty \geq \epsilon W$ なら上式の値は

$$\begin{aligned}
&=O\left(\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)^2 \cdot \log\frac{n}{\epsilon^2}\right)(nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)} \\
&=(nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)}. \qquad (32)
\end{aligned}$$

STEP1 のランダムシフト 4 分木構成のため, このアルゴリズムはランダムアルゴリズムであり, 1 回の試行では 1/2 以上の確率で成功する. 全ての $0 \leq a, b < L/g = O(n/\epsilon^2)$ の組合せに対して試行することで脱ランダム化することができ, その実行時間は式 (32) の高々$O(n^2/\epsilon^4)$ 倍であるため, この場合にこのアルゴリズムは n, W に関して多項式時間で走り, 以下の定理が得られる.

定理 4.1. ユークリッド平面の EMVRP に対して次のようなアルゴリズムが存在する. 与えられた $0 < \epsilon < 1$ に対し, アルゴリズムは最適解の $(1+\epsilon)$ 倍以下のコストとなるツアーを出力し, もし車重 w_∞ が総需要 W の ϵ 倍以上であるときには, その実行時間は $(nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)}$ である.

また, 積空比 $\frac{W+w_\infty}{w_\infty}$ が定数上界をもつという問題クラスに限定すれば, 同様の解析で次を得る.

定理 4.2. 積空比 $\frac{W+w_\infty}{w_\infty}$ が定数 β 以下であるユークリッド平面の EMVRP に対して, 次のようなアルゴリズムが存在する. 与えられた $0 < \epsilon < \frac{1}{\beta-1}$ に対して, アルゴリズムは最適解の $(1+\epsilon)$ 倍以下のコストとなるツアーを出力し, その実行時間は $(nW)^{O((\frac{1}{\epsilon}\log\frac{1}{\epsilon})^2)}$ である.

つまり, 積空比が定数上界をもつユークリッド EMVRP は PTAS をもつ.

5 まとめと今後の課題

Arora, Karakostas のユークリッド WMLP に対する近似アルゴリズム [2] を, パラメータ k, m, r の設定で車重 w_∞ を考慮するよう変更して, ユークリッド EMVRP に適用した. 文献 [2] とほぼ同様の解析により, 積空比 $\frac{W+w_\infty}{w_\infty}$ が定数上界をもつように限定した問題クラスは多項式時間近似スキームを持つことを示した. 積空比が定数以下という制限は, 応用上比較的自然な条件と考えられる.

今後の課題として, 提案アルゴリズムが車両複数台の EMVRP に適応できるかの検討が挙げられる.

参考文献

[1] Sanjeev Arora, "Polynomial Time Approximation Schemes for Eudcidean Traveling Salesman and other Geometric Problems", *Journal of the ACM*, Volume 45, pp. 2-11, 1996.

[2] Sanjeev Arora, and George Karakostas, "Approximation Schemes for Minimum Latency Problems", *Proceedings of the 31th ACM Symposium on Theory of Computing*, Atlanta, GA, pp. 688-693, 1999.

[3] Imdat Kara, Bahar Y. Kara, and M. Kadri Yetis, "Energy Minimizing Vehicle Routing Problem", *COCOA 2007*, LNCS 4616, pp. 62-71, 2007.

[4] R. M. Karp, "Reducibility among combinatorial problems", *Complexity of Computer Computations*, pp. 85-103, 1972.